1991. évi verseny, 1. nap

1. Határozd meg az $x^2-4y^2=116$ egyenlet pozitív egész megoldásait!

2. Egy téglatest egy csúcsában két él hossza kettő szomszédos számmal egyenlő, a harmadik él a másik kettő szorzata. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest testátlójának hossza is egész szám!

3. Egy osztályban mind a 30 tanuló különböző magasságú. A tanulókat felállítják egy 5 soros és 6 oszlopos alakzatba. Minden sorban a legmagasabb gyerek kap egy zöld jelvényt, és minden oszlopban a legalacsonyabb egy kék jelvényt. Ezen kívül a zöldjelvényesek közül a legkisebb kap egy arany jelvényt, a kékjelvényesek közül a legnagyobb pedig egy ezüstöt. Lehetséges-e, hogy az ezüstjelvényes gyerek magasabb, mint az aranyjelvényes?

4. Egy szabályos háromszög P belső pontjából merőlegest állítunk a háromszög egyes oldalaira. Ezek talppontjai sorra E, F, G. Bizonyítsuk be, hogy a $PE + PF + PG$ távolságösszeg nem függ a P helyzetétől!

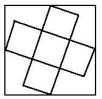
5. Bizonyítsd be, hogy 20 egész szám közül mindig kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 19-cel!

1991. évi verseny, 2. nap

1. Oldd meg a következő egyenletet:
$\frac{x-6}{50}+\frac{x-5}{51}+\frac{x-4}{52}+\frac{x-3}{53}=\frac{x-50}{6}+\frac{x-51}{5}+\frac{x-52}{4}+\frac{x-53}{3}$

2. Számozzuk meg sorrendben a 8×8-as sakktábla sorait és oszlopait, és minden mezőre írjuk rá a mező sorszámának és oszlopszámának összegét. Helyezzünk most el 8 bástyát a táblán úgy, hogy semelyik kettő se üthesse egymást, azaz minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya álljon. Bizonyítsuk be, hogy a bástyák alatti számok összege bármely elhelyezésnél ugyanakkora! Hányféleképpen helyezhető el a táblán 8 bástya a mondott feltételekkel?

3. Egy négyzetbe öt egybevágó négyzetből álló keresztet szerkesztettünk úgy, hogy a kereszt négy csúcsa egy-egy oldalfelező pontba esik. Hányad része a kereszt területe a négyzet területének?

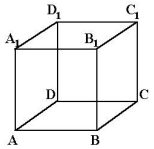


4. Egy adott körcikkbe szerkesszünk az ábrán látható módon paralelogrammát úgy, hogy területe a lehető legnagyobb legyen!

1992. évi verseny, 1. nap

1. Melyik az a három legkisebb egymást követő pozitív egész szám, amelyek összege egy egész szám négyzete is és egy egész szám köbe is egyben?

2. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 6 egység. Az AB él felezőpontja P, a CC_1 élé Q, a D_1C_1 élé pedig R. Számítsuk ki annak a síkidomnak a kerületét, amelyet a kocka metsz ki a P, Q, R pontokra illeszkedő síkból.



3. Egy konvex nyolcszög összes átlóját meghúztuk. Legfeljebb hány különböző metszéspont keletkezett a sokszög belsejében?

4. Igaz-e a következő állítás? Ha két pozitív törtszám összege 1, akkor különbségük és négyzetük különbsége egyenlő.

5. Az ABC derékszögű háromszög BC befogója, mint átmérő fölé kört rajzolunk, ez a kör az AB átfogót a D pontban metszi. A körhöz a D pontban érintőt húzunk, ez az AC befogót E-ben metszi. Igazoljuk, hogy $EA = ED$!

1992. évi verseny, 2. nap

1. Melyik nagyobb: 202^{303} vagy 303^{202}, és miért?

2. Egy téglalap alakú halastóban a halászatot megtiltották három egybevágó, a téglalap oldalával párhuzamos oldalú négyzetalakú területen. A halastó oldalai 1000 m és 1500 m, a négyzetek oldala 500 m. A három négyzet középpontja egy 400 m oldalhosszúságú szabályos háromszöget alkot, ennek a háromszögnek egyik oldala párhuzamos a téglalap hosszabbik oldalával. Mekkora területen lehet halászni?

3. Igazoljuk, hogy bármely $n \geq 1$ egész számra $21n+4$ és $14n+3$ legnagyobb közös osztója 1.

4. Oldjuk meg a következő egyenletet: $8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0$.

1993. évi verseny, 1. nap

1. Melyik az a két pozitív egész szám, amelyek négyzetének különbsége 1993?

2. Egy szabályos sokszögnek 27 átlója van. Mekkorák a sokszög szögei?

3. Négy egymást követő páratlan pozitív egész szám szorzata 9-re végződik. Milyen számjegy áll a szorzatban a százasok és a tízesek helyén?

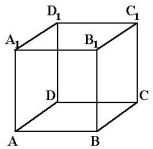
4. Adott a síkon 6 pont, ezek közül semelyik 3 sem esik egy egyenesbe. Ketten, A és B felváltva meghúznak egy-egy adott pontpárt összekötő, még be nem rajzolt szakaszt, A pirossal, B kékkel. Az veszít, aki először kénytelen olyan szakaszt meghúzni, hogy így saját színével háromszög keletkezik. Lehet-e döntetlen ebben a játékban? És 5 pont esetén?

5. Az $ABCD$ négyzet belsejében levő P pont távolsága három csúcstól sorra $PA = 7$, $PB = 13$ és $PC = 17$. Számítsuk ki a négyzet területét!

1993. évi verseny, 2. nap

1. Kiválasztunk egy tetszőleges háromjegyű számot és négyzetre-emeljük. Ezután a kiválasztott szám számjegyeit fordított sorrendben leírjuk, és a kapott számot emeljük négyzetre. A két négyzet közül a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Igaz-e, hogy az eredmény mindig osztható 99-cel?

2. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka belsejében egy P pont az $ABCD$ laptól 12, az ABB_1A_1 laptól 4, az ADD_1A_1 laptól 3 egység távolságra van. Milyen messze van P az A csúcstól?



3. Van-e olyan háromjegyű pozitív egész szám, amelynek minden pozitív egész kitevőjű hatványa ugyanarra a három számjegyre végződik?

4. A négyzet oldala egységnyi, a negyedkörívek középpontjai a négyzet csúcsai és áthaladnak a négyzet középpontján. Mekkora bevonalazott síkrész területe?

1994. évi verseny, 1. nap

1. Egy paralelogramma két szomszédos oldala 2 és 4 egység, szöge 60°. Mekkorák a paralelogramma átlói?

2. Egy téglalap oldalai 5 és 9 egység. A téglalapot felbontottuk 10 darab egész oldalhosszúságú téglalapra. Igazoljuk, hogy ezek között van két egyenlő területű téglalap!

3. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$||x-1|-1| = x-2.$$

4. Mutassuk meg, hogy egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapon fekvő szögei 30°-osak, felbontható 5 (nem feltétlenül egybevágó) ugyanilyen egyenlő szárú háromszögre!

5. Igazoljuk minél rövidebben, hogy a következő egyenlőség helyes:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}.$$

1994. évi verseny, 2. nap

1. Egy derékszögű háromszög két befogója 3 és 4 egység. Mindkét befogóra, mint átmérőre kört rajzolunk. Számítsuk ki a két kör közös húrjának hosszát!

2. Hányféleképpen választhatunk ki 1 és 30 között 3 egész számot úgy, hogy összegük páros legyen?

3. Van-e olyan x és y egész szám, amely eleget tesz a következő egyenlőségnek: $6x^2 - y^2 = 9$?

4. Hol vannak a síkon azok az $(x; y)$ koordinátájú pontok, amelyek kielégítik a következő egyenlőséget:

$$|x+y| + |x-y| = 4.$$

1995. évi verseny, 1. nap

1. Mutassuk meg, hogy ha egy háromjegyű páros szám első két jegyéből álló számhoz hozzáadjuk az utolsó számjegy felét és a kapott szám osztható 4-gyel, akkor az eredeti háromjegyű szám osztható 8-cal!

2. Hány olyan 20 egység kerületű háromszög van, amelyre teljesül, hogy oldalainak hosszát egész szám fejezi ki? (Két háromszöget azonosnak tekintünk, ha oldalaik ugyanolyan hosszúságúak.)

3. Tudjuk, hogy az a, b, c, d számokra teljesül, hogy $a < b < c < d$. Rakjuk növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$x = (a+b)(c+d),$$
$$y = (a+c)(b+d),$$
$$z = (a+d)(b+c).$$

4. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 5-szöröse a másik hegyesszögének, a háromszög átfogója c. Számítsuk ki a háromszög területét!

5. Egy egér rágcsál egy 3 egység oldalú, kocka alakú sajtot, amely 27 egységkockából van összerakva. Amikor egy egységkocka sajtot megevett, átmegy a szomszédos, vele közös oldallappal rendelkező egységkockába és azt eszi. Előfordulhat-e, hogy az egér a középső kocka kivételével a többi 26 egységkockát megeszi?

1995. évi verseny, 2. nap

1. Egy egyenlő szárú, tompaszögű háromszög két belső szögfelezője közül a hosszabb kétszerese a rövidebbnek. Mekkorák a háromszög szögei?

2. Legyen a és b olyan pozitív egész, amelyre $b^2 = a - b$. Bizonyítsuk be, hogy $a + b + 1$ négyzetszám.

3. Egy kockát tetraéderekre darabolunk. Legalább hány tetraédert kapunk?

4. Igazoljuk, hogy öt egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem lehet egy egész szám négyzete!

1996. évi verseny, 1. nap

1. Valaki azt állította, hogy egy pozitív egész szám négyzetének a számjegyeit összeadta és 1995-öt kapott. Igaza van-e?

2. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalaira kifelé megszerkesztjük a BPC és CQD szabályos háromszögeket. Igazoljuk, hogy APQ is szabályos háromszög!

3. Az A pozitív egész számról a következőket tudjuk: osztható 5-tel és 49-cel, továbbá összesen 10 pozitív osztója van. Mi lehet A?

4. Egy papírlapra felírtuk 1-től 20-ig az egész számokat. Igaz-e, hogy bárhogyan is veszünk ki 10-et a felírt számok közül, ezek közül mindig kiválasztható 4 szám úgy, hogy közülük kettő különbsége egyenlő a másik kettő különbségével?

5. Egy szimmetrikus trapéz középvonala k hosszúságú, átlói merőlegesek egymásra. Számítsuk ki a trapéz területét!

1996. évi verseny, 2. nap

1. A következő szorzásban azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek: $\overline{BIT} \cdot \overline{BIT} = \overline{SOKBIT}$

Mi lehet a szorzat értéke?

2. Egy körben adott két egymásra merőleges átmérő. Az egyik végpontjából húzott húrt a másik átmérő 2 és 4 egység hosszú szakaszokra bontja.

Mekkora a kör sugara?

3. Az $ABCD$ egységoldalú négyzet AB oldalára kifelé egy AEB szabályos háromszöget szerkesztettünk. Mekkora a DCE háromszög köré írható kör sugara?

4. Igazoljuk, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata, ha a középső szám egy egész szám köbe, osztható 504-gyel!

1997. évi verseny, 1. nap

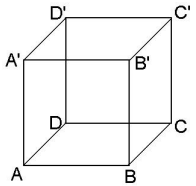
1. Mennyi a következő összeg értéke?
$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 99^2 - 100^2 + 101^2$

2. Szerkesszük meg egy adott ABC háromszög belsejében azt az O pontot, amelyre igaz, hogy az AOB, BOC és COA háromszögek területe egyenlő!

3. Hány számjegyből áll a 2^{100} tízes számrendszerben felírt alakja?

4. Igazoljuk, hogy a 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 79, 80 számok közül ki lehet választani 16-ot úgy, hogy a kiválasztott számok közül semelyik kettőnek a számtani közepe sincs a kiválasztottak között!

5. Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka éle 6 egység. F a DD' él felezőpontja, H a CC' él, C-hez közelebbi harmadoló pontja. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az A, F, H pontokra illesztett sík a $BCC'B'$ négyzetből levág!



1997. évi verseny, 2. nap

1. Igazoljuk, hogy a $2^{50} + 1$ nem osztható $2^7 - 1$-gyel!

2. Egy konvex hétszög összes átlóját meghúztuk, ezek a hétszöget feldarabolják kisebb sokszögekre. Maximálisan hány oldalú lehet egy ilyen kisebb sokszög?

3. Keressük meg azt a pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy 11111_a az a alapú számrendszerben egy pozitív egész szám négyzete?

4. Egy 25 sorból és 25 oszlopból álló táblázat minden mezőjébe $+1$-et vagy -1-et írtak. Minden sor végére odaírták a sorban álló számok szorzatát. Hasonlóan minden oszlop alá odaírták az oszlopban álló számok szorzatát. Lehet-e az így kapott 50 szorzat összege 0?

1998. évi verseny, 1. nap

1. Igazoljuk, hogy a következő két szám legnagyobb közös osztója
1: $1998 \cdot 1999$ és $1998^{1999} + 1999^{1998}$.

2. Egy egységnyi oldalú négyzet középpontján áthalad egy e egyenes. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak e-től mért távolságai négyzetének összegét!

3. Igazoljuk, hogy a 2 felírható 1998 darab különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként!

4. Egy szabályos kilencszög minden csúcsát befestettük vagy pirosra, vagy kékre. Ha a kilencszög három csúcsát kiválasztjuk és mindhárom csúcs piros, akkor azt mondjuk, hogy az piros háromszög. Ha mindhárom csúcs kék, akkor az kék háromszög. Igazoljuk, hogy vagy van két különböző egybevágó piros, vagy van két különböző egybevágó kék háromszög!

5. Mennyi a $\sqrt{x^2 + (32-y)^2} + \sqrt{(24-x)^2 + y^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y nemnegatív valós számokat jelölnek?

1998. évi verseny, 2. nap

1. Határozzuk meg mindazokat a kétjegyű A számokat, amelyeknek bármelyik pozitív egész kitevőjű hatványának utolsó két jegyéből álló szám A.

2. Egy téglatest testátlója a vele egy csúcsból induló 3 éllel rendre α, β és γ szöget zár be. Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma < 180°$!

3. Egy táblára felírták 1-től 20-ig a pozitív egész számokat. Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki ezek közül 10-et, a kiválasztottak között mindig van 4 olyan szám, amelyek közül kettő összege megegyezik a másik kettő összegével!

4. Egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza a és b. Egy ezekkel párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát a trapéz átlói három egyenlő szakaszra bontják. Milyen hosszú ez a trapézba eső szakasz?

1999. évi verseny, 1. nap

1. Igazoljuk, hogy 2001 nem állítható elő két pozitív egész szám köbének összegeként!

2. Két hajó a tengeren egymásra merőleges irányban halad, az első 30 km/óra, a második 40 km/óra állandó sebességgel. A haladási irányuk metszéspontja O. Az indulás pillanatában az első hajó távolsága O-tól 100 km, a másodiké 300 km volt. Haladásuk során mekkora volt a két hajó legkisebb távolsága?

3. Az ABC derékszögű háromszög derékszögű C csúcsából húzott magasság talppontja az átfogón D. Igazoljuk, hogy az ABC, BCD, ACD háromszögekbe írt körök sugarainak összege egyenlő az átfogóhoz tartozó magassággal!

4. Egy sakkversenyen k versenyző vett részt (mindenki játszott mindenkivel). A versenyzők között voltak mesterek és nagymesterek. A verseny végén kiderült, hogy a nagymesterek az összes olyan partit megnyerték, amit mesterek ellen játszottak, és ezekben a partikban az egész versenyen összegyűjthető összes pontok felét szerezték meg. Igazoljuk, hogy k négyzetszám!

5. Hány olyan háromszög van, amelynek kerülete 60 egység, és oldalainak hosszát egész szám fejezi ki?

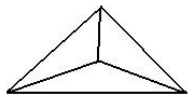
1999. évi verseny, 2. nap

1. Van 10 különböző könyvünk, ezekből 5 darab, egyenként 2–2 könyvet tartalmazó csomagot kell készíteni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

2. Mutassuk meg, hogy bárhogyan is adunk meg 10 pozitív, 91-nél nem nagyobb egész számot, van közöttük kettő, amelyek hányadosa legfeljebb 1,5.

3. Egy szabályos hétszög csúcsait beszínezzük pirosra, vagy kékre. Igazoljuk, hogy bármilyen színezés mentén van három olyan csúcs, amelyek azonos színűek, és egyenlőszárú háromszöget alkotnak!

4. Egy háromszöget akarunk felbontani kisebb háromszögekre a következő kikötéssel: minden háromszögcsúcsban (az eredeti és a kis háromszögekben is) ugyanannyi háromszögoldal találkozzon. Például az ábrán minden csúcsban 3 oldal találkozik. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?



2000. évi verseny, 1. nap

1. Van-e olyan pozitív egész szám, amelyet négyzetre emelve és a kapott szám számjegyeit összeadva a) 2001-et kapunk? b) 2002-t kapunk?

2. Az A, B és C pontok úgy helyezkednek el egy síkon, hogy a sík tetszőleges P pontjára igaz, hogy az AP távolság rövidebb a BP és CP távolságok valamelyikénél. Hogyan helyezkednek el az A, B, C pontok?

3. Adottak a síkon az O, P_1, P_2, $\ldots$, P_{99} pontok úgy, hogy semelyik három sem esik egy egyenesbe, és adott a síkon egy O-n áthaladó e egyenes, amelyről tudjuk, hogy az egyik oldalán a P_i $(1 \le i \le 99)$ pontok közül éppen 48 van. Van-e olyan f egyenes a síkon, amely áthalad O-n, és az egyik oldalán a) 49 darab P_i pont; b) 47 darab P_i pont van?

4. A $2 \le x \le 5$ feltételeknek eleget tevő valós számok körében értelmezzük a következő függvényt: $f(x) = \frac{2x^2+5x-7}{x^2+3x-4}$. Hol veszi fel a függvény a legnagyobb és legkisebb értékét, és mennyi ez az érték?

5. Adott a síkon az ABC háromszög, és ketten, X és Y a következő játékot játszák. először X kijelöl az AB oldalon egy P pontot, azután Y jelöl ki a BC oldalon egy Q pontot, végül megint X jelöl ki a CA oldalon egy R pontot. X-nek az a célja, hogy a keletkező PQR háromszög területe a legnagyobb legyen, Y-nak pedig az a célja, hogy a PQR háromszög területe a lehető legkisebb legyen. Mekkora lesz a PQR háromszög területe, ha mindketten jól választanak?

2000. évi verseny, 2. nap

1. Az n pozitív egész számról tudjuk, hogy két szomszédos négyzetszám közé esik, mégpedig a kisebbik négyzetszámnál p-vel nagyobb, a nagyobbiknál q-val kisebb. Igazoljuk, hogy $n - pq$ négyzetszám!

2. Adott a síkon két pont, A és B. Hol helyezkednek el a síkon azok a P pontok, amelyekre igaz, hogy ha P-ből B felé indulunk egy egyenes mentén, akkor a mozgó pont A-tól mért távolsága egyre nő?

3. Néhány pozitív egész számról tudjuk, hogy a köbeik (harmadik hatványaik) összege osztható 6-tal. Mutassuk meg, hogy ekkor a számok összege is osztható 6-tal!

4. Az ábrán látható módon $\frac{n(n+1)}{2}$ egybevágó korongot egy szabályos háromszögben raktunk össze (ábránkon $n = 4$). A korongok felső felén + jelek, alsó felén − jelek vannak. Egy lépésben 3, egymással páronként érintkező korongot megfordíthatunk. Mely n-ekre igaz, hogy véges sok lépésben elérhető, hogy az összes korongon a − jel legyen felül?

2001. évi verseny, 1. nap

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ egyenletet!

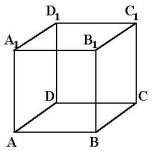
2. Az $ABCD$ trapéz két párhuzamos oldala $AB = 4$, $CD = 2$ egység. A P pont az AD száron, Q pedig a BC száron van úgy, hogy PQ párhuzamos AB-vel, és a PQ szakaszt a két átló három egyenlő részre osztja. Mekkora a PQ szakasz?

3. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{49}$ pozitív egész számok összege 999. Legfeljebb mennyi lehet ennek a 49 számnak a legnagyobb közös osztója?

4. Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

5. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka éle 1 egység. A P pont a BD szakaszon, a Q pont pedig a CC_1 szakaszon úgy helyezkedik el, hogy a PQ egyenes az $ABCD$ síkkal 45°-os, a BCC_1B_1 síkkal pedig 30°-os szöget zár be. Mekkora a PQ távolság?



2001. évi verseny, 2. nap

1. Tegyük fel, hogy $A = \overline{abc}$ egy háromjegyű prímszám. Mutassuk meg, hogy A nem lehet osztója egy olyan számnak, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy a számjegyei sorrendjét megváltoztatjuk!

2. Az ABC derékszögű háromszög átfogója AB. A BC befogó, mint átmérő fölé rajzolt kör az AB átfogót a (B-től különböző) D pontban metszi. A körhöz a D pontban húzott érintőnek és az AC befogónak a metszéspontja E. Igazoljuk, hogy $DE = EA$!

3. A négyzetrácsos (kockás) papíron megrajzoltak egy téglalapot, amelynek csúcsai rácspontok, oldalai rácsegyenesekre esnek, és hosszuk n és $n-1$ egység (az egység a rácsnégyzet oldala). Hány olyan négyzet van ebben a téglalapban, amelynek csúcsai rácspontok, oldalai rácsegyenesekre illeszkednek?

4. Egy konvex szabályos hatszög oldalának hossza a. Az egyik csúcsán áthaladó egyenes két olyan részre osztja a hatszöget, amelyek területének aránya $3:1$. Milyen hosszú az egyenesnek a hatszögbe eső darabja?